

Практика 1. Написать и прокомментировать формулу
числа вершин в зависимости от числа рёбер в
максимальном планарном графе.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Написать и прокомментировать формулу числа вершин в зависимости от числа рёбер в максимальном планарном графе.

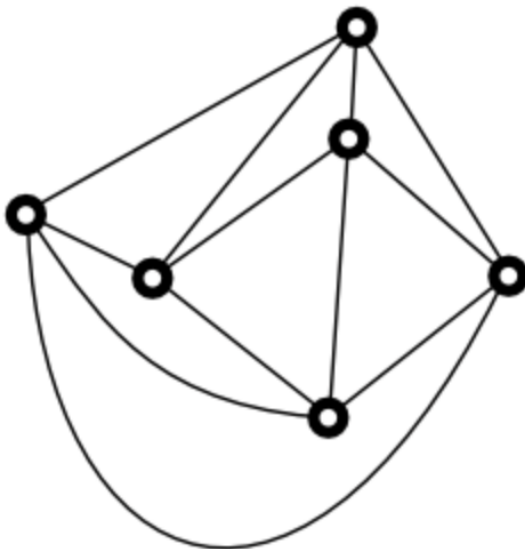
Определение.

Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Определение.

Простой граф (конечный граф без кратных ребер и петель) называется **максимально планарным**, если он плоский, но добавление любого ребра (на заданному наборе вершин) разрушило бы это свойство.

Написать и прокомментировать формулу числа вершин в зависимости от числа рёбер в максимальном планарном графе.



Написать и прокомментировать формулу числа вершин в зависимости от числа рёбер в максимальном планарном графе.

Каждая грань в максимальном планарном графе имеет три вершины, поэтому максимальный планарный граф называется **триангулированным** и имеет ровно три внешних ребра.

Формула Эйлера. Если планарный связный граф имеет v вершин, e – количество ребер, f – количество граней, то они связаны формулой $v - e + f = 2$.

Следствие из формулы Эйлера. Планарный граф с числом вершин $v \geq 3$ имеет не более $3v - 6$ ребер. Триангулированный граф с v вершинами имеет $3v - 6$ ребер.

Доказательство. Каждая грань графа ограничена не менее тремя ребрами, а каждое ребро является границей не более двух граней, тогда $3f \leq 2e$. Отсюда по формуле Эйлера следует:

$$2 = v - e + f \leq v - e + \frac{2}{3}e \Rightarrow e \leq 3v - 6.$$

Для максимальнопланарного графа выполняется равенство $3f = 2e$, аналогично из формулы Эйлера получаем $e = 3v - 6$ и $f = 2v - 4$.